Thermodynamique | Chapitre 5 | Correction TD (θ5)

Exercice n°1 • Machine frigorifique tritherme *cours*

1) L'énoncé précise que la source chaude fournit de la chaleur au fluide. Donc $\boxed{Q_c > 0}$. C'est normal : étant donné qu'il n'y a aucun travail mécanique, le flux thermique de la source chaude doit nécessairement aller dans le sens « naturel » des échanges thermiques, donc vers les sources plus froides.

Pour être un réfrigérateur, le fluide doit prélever du froid à la source froide. Donc $\boxed{Q_f > 0}$.

Finalement, le premier principe appliqué au fluide sur un cycle donne :

$$\Delta H = 0 = Q_c + Q_f + Q_a \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q_a = -(Q_c + Q_f) < 0}$$

2) Toujours d'après le premier principe :

$$0 = |Q_c| + |Q_f| - |Q_a| \quad \Rightarrow \quad |Q_f| = |Q_a| - |Q_c| > 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{|Q_a| > |Q_c|}$$

Le résultat est logique puisque la source tiède « reçoit » (via le fluide caloporteur) deux transferts thermiques : celui de la source froide et celui de la source chaude.

3) Le coefficient de performance est le rapport de la grandeur utile (ici le transfert thermique prélevé par le fluide à la source froide, soit Q_f) et de la grandeur coûteuse (ici le transfert thermique donné au fluide par la source chaude, soit Q_c).

$$\boxed{e = \frac{Q_f}{Q_c}}$$

4) Le second principe appliqué au fluide sur un cycle réversible (machine de Carnot) donne :

$$\Delta S = 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_a}{T_a} \quad \Rightarrow \quad 0 = \frac{Q_c}{T_c} + \frac{Q_f}{T_f} - \frac{Q_c + Q_f}{T_a}$$

$$\Rightarrow \quad 0 = Q_c\left(\frac{1}{T_c} - \frac{1}{T_a}\right) + Q_f\left(\frac{1}{T_f} - \frac{1}{T_a}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{e_c = \frac{Q_f}{Q_c} = \frac{1/T_a - 1/T_c}{1/T_f - 1/T_a}}$$

5) Si $T_c \to \infty$, alors :

$$\boxed{e_c \to \frac{1/T_a}{1/T_f - 1/T_a} = \frac{T_f}{T_a - T_f}}$$

On retrouve là l'efficacité de Carnot d'une machine frigorifique ditherme dont la source froide est l'intérieur du réfrigérateur et la source chaude l'ai ambiant.

6) Elle ne nécessite pas de compresseur (alimenté par un moteur), ce qui a pu être utile à une époque où les moteurs électriques étaient inexistants et les machines à vapeur encore peu perfectionnées.

Exercice n°2 • Cogénération *cours*

1) Il faut dans cet exercice prêter attention aux conventions de sens pour les échanges énergétiques, pas toujours orientés vers la machine thermique. On a :

$$\eta = 1 - \frac{T_1}{T_2} = \frac{W}{Q_c} = 1 - \frac{Q_2}{Q_c} \quad \text{et} \quad e = \frac{T_1}{T_1 - T_0} = \frac{Q_0}{W}$$

le rendement du moteur idéal et l'efficacité de la pompe à chaleur, elle aussi idéale.

L'efficacité e_{tot} du dispositif entier est ici le rapport du transfert thermique reçu par la serre $Q_0 + Q_2$ par l'énergie dépensée Q_c :

$$\boxed{e_{tot} = \frac{Q_0 + Q_2}{Q_c}}$$

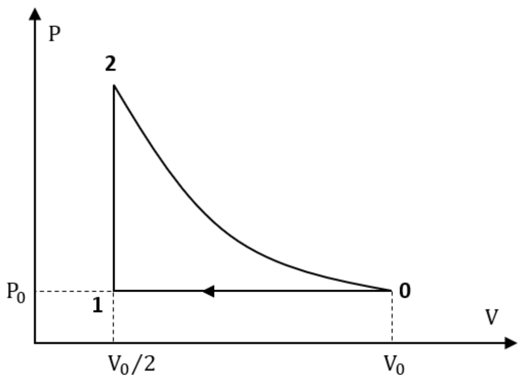
On constate que $\dfrac{Q_0}{Q_c} = \eta \cdot e$ et $\dfrac{Q_2}{Q_c} = 1 - \eta$. Ainsi :

$$\boxed{e_{tot} = 1 + \eta\,(e-1) = 1 + \frac{T_2 - T_1}{T_2} \cdot \frac{T_0}{T_1 - T_0} = \frac{T_1}{T_2} \cdot \frac{T_2 - T_0}{T_1 - T_0}}$$

2) Une chaudière seule dans la serre a une efficacité de 1 car toute la chaleur produite par la chaudière et transmise à la serre. Or, $e_{tot} > 1$ puisque $e > 1$.

Exercice n°3 • Rendement d'un cycle ★☆☆

1)



2) Loi des gaz parfaits :

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{P_0 V_0}{2nR} = \boxed{\frac{T_0}{2}}$$

Loi de Laplace :

$$TV^{\gamma-1} = cte \quad \Rightarrow \quad T_2 = T_0 \left(\frac{V_0}{V_2}\right)^{\gamma-1} = \boxed{2^{\gamma-1}\, T_0}$$

3) Le cycle est parcouru dans le sens horaire, c'est donc un moteur. Son rendement est défini par :

$$\boxed{\eta = -\frac{W}{Q_c} = 1 + \frac{Q_f}{Q_c}}$$

4) On a :

$$\begin{aligned}
W_{01} &= -P_0\,(V_1 - V_0) = \frac{nRT_0}{2} \\
\Delta U_{01} &= C_V\,(T_1 - T_0) = \frac{-1}{\gamma-1}\frac{nRT_0}{2} \\
Q_{01} &= \Delta U_{01} - W_{01} = \frac{-\gamma}{\gamma-1}\frac{nRT_0}{2} < 0 \\
W_{12} &= 0 \\
Q_{12} &= \Delta U_{12} = C_V\,(T_2 - T_1) = \frac{2^\gamma - 1}{\gamma-1}\frac{nRT_0}{2} > 0 \\
Q_{20} &= 0
\end{aligned}$$

On en déduit donc : $Q_f = Q_{12}$ et $Q_c = Q_{01}$. Ainsi,

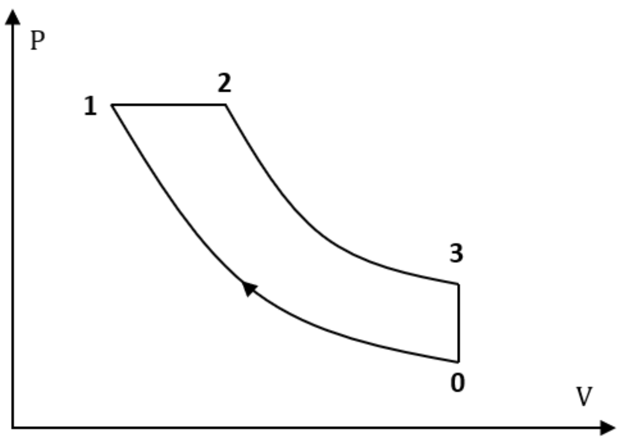
$$\boxed{\eta = 1 - \frac{\gamma}{2^\gamma - 1} = 15\,\%}$$

5) Température de la source froide : $T_f = T_1 = T_0/2$ et température de la source chaude $T_c = T_2 = 2^{\gamma-1}\,T_0$. Ainsi, le rendement de Carnot vaut :

$$\boxed{\eta_c = \frac{\Delta T}{T_c} = 1 - \frac{1}{2^\gamma} = 62\,\%}$$

Exercice n°4 • Moteur Diesel ★⯪☆

1)



2) On a directement :

$$\boxed{V_1 = \frac{V_0}{a}} \qquad \boxed{V_2 = \frac{V_0}{b}} \qquad \boxed{V_3 = V_0}$$

3) Loi de Laplace (01) :

$$P_0 V_0^\gamma = P_1 V_1^\gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_1 = P_2 = P_0\, a^\gamma}$$

Loi de Laplace (23) :

$$P_2 V_2^\gamma = P_3 V_3^\gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_3 = P_0 \left(\frac{a}{b}\right)^\gamma}$$

4) On a :

État	P (bar)	V (L)	T (K)
0	1	24,9	300
1	21,7	2,77	723
2	21,7	8,31	2170
3	4,66	24,9	1400

5) On a :

Étape	W	Q
01	$C_V\,(T_1 - T_0)$	0
12	$-P_1\,(V_2 - V_1)$	$C_P\,(T_2 - T_1) > 0$
23	$C_V\,(T_3 - T_2)$	0
30	0	$C_V\,(T_0 - T_3) < 0$

6) Par définition du rendement :

$$\boxed{\eta = 1 + \frac{Q_f}{Q_c} = 1 + \frac{Q_{30}}{Q_{12}} = 1 + \frac{T_0 - T_3}{\gamma\,(T_2 - T_1)} = 46\ \%}$$

7) Par définition du rendement de Carnot :

$$\boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_f}{T_c} = 1 - \frac{T_0}{T_2} = 86\ \%}$$

8) Le rendement du moteur Diesel est inférieur à celui de Carnot, ce qui signifie que le cycle décrit par le moteur n'est pas réversible. En effet les deux transformations (12) et (30) se font avec échange de transfert thermique alors que la température du système n'est pas égale à la température extérieure, il y a donc diffusion thermique qui est une cause d'irréversibilité.

Le moteur réel aurait un rendement encore inférieur lié à la présence de frottements notamment.

Exercice n°5 • Chauffage d'un bâtiment ★★☆

1) L'efficacité de la pompe à chaleur est définie par le rapport du transfert thermique Q_c reçu par le fluide caloporteur de la part de la source chaude (l'intérieur de la maison) par le travail W reçu par le fluide caloporteur sur un cycle.

Sur la durée $\Delta t = 1$ heure, le fluide reçoit le transfert thermique $Q_c = 5$ MJ. Alors,

$$e = \frac{Q_c}{W} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{P} = \frac{W}{\Delta t} = \frac{Q_c}{e\,\Delta t} = 430\ \text{W}}$$

2) Les radiateurs électriques ont une efficacité de 1, donc pour assurer le même transfert de chaleur, il faudrait fournir une puissance $3,2$ fois plus élevée, soit $\boxed{1,4\ \text{kW}}$.

3) 80 % de l'énergie libérée par la combustion du fuel sert à chauffer le bâtiment. L'énergie dégagée par la combustion de fuel doit donc être de $5/0,8 = 6,25$ MJ pour pouvoir chauffer le bâtiment durant 1 heure.

Ainsi, chaque heure, il faut brûler :

$$V = \frac{6,25\ \text{MJ}}{37\ \text{MJ·L}^{-1}} = \boxed{0,17\ \text{L de fuel}}$$

4) On chauffe le bâtiment avec la pompe à chaleur précédente. L'énergie électrique nécessaire par heure est de :

$$\mathcal{E}_{elec} = \mathcal{P}\,\Delta t = \frac{Q_c}{e} = 1,56\ \text{MJ}$$

La combustion du fuel devra donc fournir :

$$\frac{\mathcal{E}_{elec}}{0,4} = 3,9\ \text{MJ·h}^{-1}$$

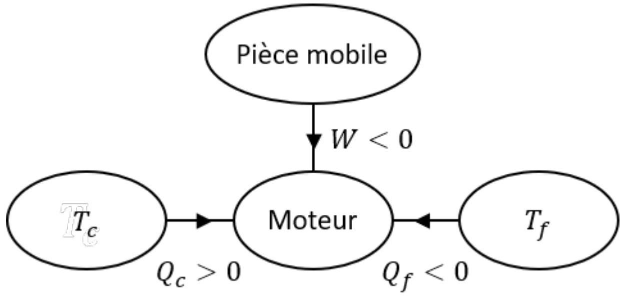
ce qui nécessitera la combustion de $\boxed{0,10\ \text{L}}$ de fuel par heure.

Ainsi, l'utilisation comme source de production d'énergie électrique alimentant la pompe à chaleur plutôt que d'utiliser directement l'énergie dégagée par la combustion, permet d'économiser chaque heure $0,07$ L de fuel, donc chaque jour $1,68$ L, soit à la fin de l'hiver (environ 5 mois, soit 150 jours), environ 250 L de fuel.

C'est intéressant... passer l'investissement de la pompe à chaleur.

Exercice n°6 • Moteur ditherme avec sources non idéales ★★⯪

1)



2) On a :

$$\boxed{0 = \delta W + \delta Q_f + \delta Q_c} \quad \text{et} \quad \boxed{0 = \frac{\delta Q_f}{T_f} + \frac{\delta Q_c}{T_c}}$$

3) Les sources échangent uniquement de la chaleur δQ avec le moteur (pas d'autres chaleurs, pas de travail). Or, avec les notations précédentes, δQ représente la chaleur reçue par le moteur. Mais pour appliquer le premier principe sur une source, il faut indiquer la chaleur reçue par la source, égale à l'opposée de la chaleur cédée par la source (au moteur), donc $-\delta Q$. On en déduit (premier principe $+$loi de Joule) :

$$\boxed{dU_f = C\, dT_f = -\delta Q_f} \quad \text{et} \quad \boxed{dU_c = C\, dT_c = -\delta Q_c}$$

4) On combine le deuxième principe de la Q1 avec les deux premiers principes de la Q2 :

$$\frac{\delta Q_f}{T_f} + \frac{\delta Q_c}{T_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dT_f}{T_f} + \frac{dT_c}{T_c} = 0 \quad \Rightarrow \quad d\left(2\ln\left(\sqrt{T_f T_c}\right)\right) = 0$$

Si la différentielle d'une fonction est nulle, alors la fonction est constante. On en déduit donc que :

$$\boxed{\sqrt{T_f T_c} = cte}$$

On applique la relation précédente entre l'état initial et l'état final :

$$\sqrt{T_{f,0} T_{c,0}} = \sqrt{T_\infty T_\infty} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_\infty = \sqrt{T_{f,0} T_{c,0}}}$$

5) On applique le premier principe au moteur et à chaque source entre l'instant initial et l'instant final :

$$0 = W + Q_f + Q_c$$
$$\Delta U_f = C\,(T_\infty - T_{f,0}) = -Q_f \quad \text{et} \quad \Delta U_c = C\,(T_\infty - T_{c,0}) = -Q_c$$

On en déduit :

$$\boxed{W = 2C\left(\sqrt{T_{f,0}T_{c,0}} - \frac{T_{f,0} + T_{c,0}}{2}\right) = -7,2 \cdot 10^6\ \mathrm{J{\cdot}K^{-1}} < 0}$$

Dans la parenthèse, le premier terme correspond à la moyenne géométrique et le second à la moyenne arithmétique. La première est toujours plus petite que la seconde.

6) Par définition du rendement d'un moteur :

$$\boxed{\eta = -\frac{W}{Q_c} = \frac{2\sqrt{T_{f,0}T_{c,0}} - (T_{f,0} + T_{c,0})}{T_\infty - T_{c,0}} = 0,07}$$

Rendement de Carnot du moteur avec sources idéales :

$$\boxed{\eta_c = \frac{T_{c,0} - T_{f,0}}{T_{c,0}} = 0,13}$$

Exercice n°7 • Étude du régénérateur du moteur de Stirling ★★★

1) Nombre de moles :

$$\boxed{n = \frac{m}{M} = 5,00\ \text{mol}}$$

Pressions (à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits) :

$$\boxed{\begin{array}{ll} P_1 = \dfrac{nRT_f}{V_M} = 65,1\ \text{bar} & P_2 = \dfrac{nRT_f}{V_m} = 130\ \text{bar} \\ P_3 = \dfrac{nRT_c}{V_m} = 488\ \text{bar} & P_4 = \dfrac{nRT_c}{V_M} = 244\ \text{bar} \end{array}}$$

2) Les isochores sont des verticales, les isothermes des branches d'hyperboles (voir cycle du cours).

3) Lors d'une transformation isotherme d'un gaz parfait : $\boxed{\Delta U_{ab} = 0}$. Le travail des forces de pressions vaut :

$$\delta W = -P_{ext}\, dV = -nRT\,\frac{dV}{V} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{ab} = -nRT\ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)}$$

Le premier principe donne :

$$\boxed{Q_{ab} = -W_{ab} = nRT \ln\left(\frac{V_b}{V_a}\right)}$$

4) Lors d'une transformation isochore d'un gaz parfait : $\boxed{W_{cd} = 0}$. Le premier principe donne donc :

$$\boxed{\Delta U_{cd} = Q_{cd} = \frac{5nR}{2}\left(T_d - T_c\right)}$$

5) On a :

$$\boxed{\begin{array}{ll} W_{12} = -nRT_f \ln\left(\dfrac{V_m}{V_M}\right) = 9,02 \text{ kJ} & Q_{12} = -W_{12} = -9,02 \text{ kJ} \\[2ex] W_{23} = 0 & Q_{23} = \dfrac{5nR}{2}\left(T_c - T_f\right) = 89,4 \text{ kJ} \\[2ex] W_{34} = -nRT_c \ln\left(\dfrac{V_M}{V_m}\right) = -33,8 \text{ kJ} & Q_{34} = -W_{34} = 33,8 \text{ kJ} \\[2ex] W_{41} = 0 & Q_{41} = \dfrac{5nR}{2}\left(T_f - T_c\right) = -89,4 \text{ kJ} \end{array}}$$

6) Le travail du cycle vaut :

$$\boxed{W_{cycle} = W_{12} + W_{23} + W_{34} + W_{41} = -24,8 \text{ kJ} < 0}$$

W_{cycle} est le travail algébriquement reçu par le moteur. Puisque $W_{cycle} < 0$, alors le moteur fournit de l'énergie. Graphiquement, il s'agit de l'aire du cycle.

7) La source chaude est à l'origine des transferts thermiques pendant le chauffage (23) puis le maintien isotherme (34) donc :

$$\boxed{Q_c = Q_{23} + Q_{34} = 123 \text{ kJ}}$$

La source chaude est à l'origine des transferts thermiques pendant le refroidissement (41) puis le maintien isotherme (12) donc :

$$\boxed{Q_f = Q_{41} + Q_{12} = -98,4 \text{ kJ}}$$

8) On a :

$$\boxed{\eta_{sr} = \frac{-W_{cycle}}{Q_c} = 20,1\ \%}$$

9) Le régénérateur permet de stocker temporairement l'énergie thermique perdue lors de l'étape (41) (au lieu de la donner à la source froide) et de la redonner au gaz lors de l'étape (23) (au lieu de la prélever de la source chaude). Ainsi, la source chaude ne doit fournir que l'énergie $Q_c = Q_{34}$. Le rendement devient :

$$\boxed{\eta = \frac{-W_{cycle}}{Q_{34}} = 73,3\ \%}$$

On remarque que :

$$\eta = \frac{-W_{cycle}}{Q_{34}} = 1 + \frac{Q_{12}}{Q_{34}} = 1 - \frac{T_f}{T_c} = \eta_c$$

Avec un régénérateur idéal, le rendement devient égal au rendement de Carnot, c'est-à-dire au rendement maximal théorique du moteur.

10) C'est l'hypothèse habituelle qui distingue la rapidité des équilibres mécaniques et la lenteur des équilibres thermiques.

11) Calculons la quantité de matière totale dans le régénérateur n_r.

$$n_r = \langle n(x) \rangle = \frac{1}{L}\int_0^L n(x)\ dx = \frac{P_r V_r}{RL}\int_0^L \frac{dx}{T(x)}$$

Or, d'après l'énoncé,

$$T(x) = T_c + \frac{T_f - T_c}{L}\,x \quad \Rightarrow \quad dT = \frac{T_f - T_c}{L}\,dx$$

On en déduit :

$$n_r = \frac{P_r V_r}{R\left(T_f - T_c\right)}\int_{T_c}^{T_f} \frac{dT}{T} = \frac{P_r V_r}{R\left(T_f - T_c\right)} \ln\left(\frac{T_f}{T_c}\right)$$

Finalement,

$$P_r V_r = n_r R T_r \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_r = \frac{T_c - T_f}{\ln(T_c/T_f)}}$$

12) La quantité de matière totale n est la somme des quantités présentes dans les trois compartiments. Ainsi, $n = n_c + n_r + n_f$. De plus, la pression est identique dans toutes les chambres.

$$n = \frac{P}{R}\left(\frac{V_c}{T_c} + \frac{V_r}{T_r} + \frac{V_f}{T_f}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{nR}{\dfrac{V_c}{T_c} + \dfrac{V_r}{T_r} + \dfrac{V_f}{T_f}}}$$

13) Lors de la compression (12), la pression P augmente, à T_c et T_f (et donc T_r) constants. Ce sont les volumes des trois compartiments qui varient. Le volume V_c reste nul, V_r est constant (toujours) et le volume V_f passe de V_M à V_m. Ainsi,

$$\begin{aligned}
W'_{12} &= -\int_1^2 P\,dV = -\int_{V_M}^{V_m} \frac{nR}{V_r/T_r + V_f/T_f}\,dV_f \\
&= -nRT_f \int_{V_M}^{V_m} \frac{dV_f}{V_f + T_f V_r/T_c} = -nRT_f\Big[\ln(V_f + T_f V_r/T_c)\Big]_{V_M}^{V_m} \\
&= \boxed{-nRT_f \ln\left(\frac{V_m + T_f V_r/T_c}{V_M + T_f V_r/T_c}\right) = 8,43\ \text{kJ}}
\end{aligned}$$

Même raisonnement. Lors de la détente (34), la pression P diminue, à T_c et T_f (et donc T_r) constants. Ce sont donc les volumes des trois compartiments qui varient. Le volume V_f reste nul, V_r est constant (toujours) et le volume V_c passe de V_m à V_M. Ainsi,

$$\begin{aligned}
W'_{34} &= -\int_3^4 P\,dV = -\int_{V_m}^{V_M} \frac{nR}{V_c/T_c + V_r/T_r}\,dV_c \\
&= -nRT_c \int_{V_m}^{V_M} \frac{dV_c}{V_c + T_c V_r/T_r} = -nRT_c\Big[\ln(V_c + T_c V_r/T_r)\Big]_{V_m}^{V_M} \\
&= \boxed{-nRT_c \ln\left(\frac{V_M + T_c V_r/T_r}{V_m + T_c V_r/T_r}\right) = -26,9\ \text{kJ}}
\end{aligned}$$

Remarque : on retrouve bien les expressions de W_{12} et W_{34} obtenues précédemment lorsque $V_r = 0$.

14) On a :

$$\left|W'_{cycle}\right| = 18,4\ \text{kJ} < |W_{cycle}| = 24,8\ \text{kJ}$$

La compression ne modifie jamais le volume mort donc les volumes accessibles aux variations (dans $\delta W = -P\,dV$) sont plus faibles et l'aire totale du cycle est moins importante : il était logique que le travail fourni soit moindre que dans le cas idéal.